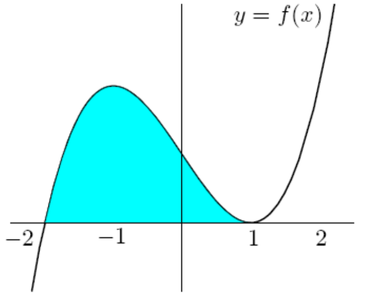
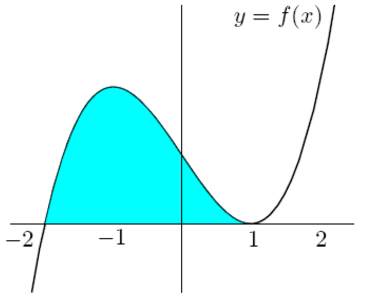
Opción A

Ejercicio n° 1 de la opción A del modelo 5 de 2005

Se sabe que la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)= x^3 + ax+ bx + c$ es la que aparece en el dibujo.
(a) [1'25 puntos] Determina f.
(b) [1'25 puntos] Calcula el área de la región sombreada.



Solución



De la gráfica de $f(x)= x^3 + ax+ bx + c$ observamos que $f(-2) = 0$, $f(1) = 0$, y que f tiene un mínimo en $x = 1$, y como es derivable tenemos que $f'(1) = 0$
$f(x)= x^3 + ax+ bx + c$
$f'(x)= x^3 + ax+ bx + c$
De $f'(1) = 0$, tenemos $0 = 3 + 2a + b$
De $f(1) = 0$, tenemos $0 = 1 + a + b + c$
De $f(-2) = 0$, tenemos $0 = - 8 + 4a - 2b +c$

Resolvemos el sistema siguiente para obtener los valores de a, b y c

$a + b + c = - 1$		$a + b + c = - 1$		$a + b + c = - 1$
$2a + b = - 3$	$2^a + 1^a(-2)$	$- b - 2c = - 1$		$- b - 2c = - 1$
$8 + 4a - 2b + c = 8$	$3^a + 1^a(-4)$	$-6b - 3c = 12$	$3^a + 2^a(-6)$	$9c = 18$

De donde $c = 2$, $b = -3$ y $a = 0$

Luego la función es $f(x)= x^3 -3x + 2$
(b)
El área de la región sombreada es

$$\text{Área} = \int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1} = [\,(1/4 - 3/2 +2\,) - (\,4 - 6 - 4)\,] = 27/4\ u^2$$

Ejercicio n° 2 de la opción A del modelo 5 de 2005

Sea f la función definida para $x \neq 2$ por $f(x) = (x^2 - 4x + 3)/(x - 2)$
(a) [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.
(b) [0'75 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .
(c) [0'75 puntos] Calcula, si existen, el máximo y el mínimo absolutos de f en el intervalo [0, 2) (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

Solución

$f(x) = (x^2 - 4x + 3)/(x - 2)$
(a)

Asíntotas

Como $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{x^2-4x+3}{x-2} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$, la recta x = 2 es una asíntota vertical (A.V.) de la gráfica de f

$\lim_{x \to 2^-} \dfrac{x^2-4x+3}{x-2} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$, para ver la posición relativa.

f(x) = (x^2 − 4x + 3) / (x − 2 tiene una asíntota oblicua (A.O.) y = mx + n, y es la misma en +∞ y en - ∞ por ser un cociente de polinomios con el numerador un grado más que el denominador.

m = $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x} = 1$

n = $\lim_{x \to \infty} (f(x)-x) = \lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2-4x+3}{x-2} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{-2x+3}{x-2} \right) = -2$

La asíntota oblicua es y = mx + n = x – 2

Como $\lim_{x \to +\infty}$ (f(x) - asintota) = 0^-, f(x) está por debajo de la A.O. y = x - 2 en +∞

Como $\lim_{x \to -\infty}$ (f(x) - asintota) = 0^+, f(x) está por encima de la A.O. y = x - 2 en - ∞

(b)

Monotonía. Estudiamos la primera derivada f ‘(x)

f(x) = (x^2 − 4x + 3) / (x − 2)

f ‘(x) = [(2x - 4)(x – 2) – (x^2 − 4x + 3)(1)]] / $(x – 2)^2$ = (x^2 – 4x + 5) / $(x – 1)^2$.

Resolviendo f ‘(x) = 0, tenemos x^2 – 4x + 5= 0, que no tiene soluciones reales luego no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

Como f ‘(0) = 5/4 > 0, la función f(x) siempre es creciente.

(c)

Extremos absolutos en [0, 2)

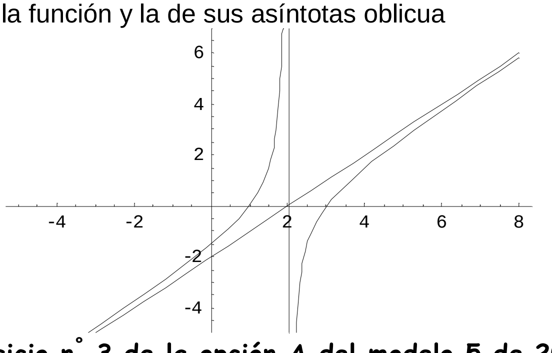
Como $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{x^2-4x+3}{x-2} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$, f(x) no está acotada superiormente por y tanto no tiene máximo absoluto.

Recordamos que los extremos absolutos se podían alcanzar en los puntos donde la función no era continua, no era derivable o en los extremos del intervalo [0, 2).

En nuestro caso la función f(x) es continua y derivable en x ≠ 2, por tanto el único punto que nos queda es x = 0.

En x = 0 tiene un mínimo absoluto que vale f(0) = -3/2

Aunque no lo piden la gráfica de la función y la de sus asíntotas oblicua



Ejercicio n° 3 de la opción A del modelo 5 de 2005

[2’5 puntos] Álvaro, Marta y Guillermo son tres hermanos. Álvaro dice a Marta: si te doy la quinta parte del dinero que tengo, los tres hermanos tendremos la misma cantidad. Calcula lo que tiene cada uno si entre los tres juntan 84 euros.

Solución

Dinero de Álvaro = x

Dinero de Marta = y

Dinero de Guillermo = z

Los tres juntan 84 euros, se traduce en x + y + z = 84

Álvaro dice a Marta: si te doy la quinta parte del dinero que tengo, los tres hermanos tendremos la misma cantidad

Marta + 1/5 de Álvaro = Guillermo, se traduce en y + (1/5)x = z
Guillermo = Álvaro – 1/5 de Álvaro, se traduce en x - (1/5)x = z

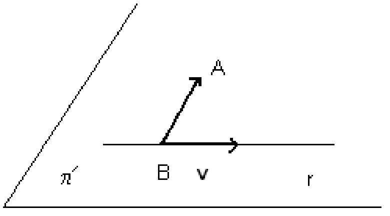
Resolviendo el sistema
x + y + z = 84
y + (1/5)x = z
x - (1/5)x = z. De aquí z = (4/5)x, con lo cual y = (3/5)x. Entrando en la primera obtenemos:
x + (3/5)x + (4/5)x = 84 de donde x = 35, y por tanto y = 21 y z = 28
Solución
Dinero de Álvaro = x = 35 euros
Dinero de Marta = y = 21 euros
Dinero de Guillermo = z = 28 euros

Ejercicio n° 4 de la opción A del modelo 5 de 2005

Considera el punto A(0, − 3, 1), el plano π ≡ 2x− 2y + 3z = 0 y la recta r ≡ x+3 = y = (z − 3)/2.
(a) [1 punto] Determina la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r.
(b) [1'5 puntos] Determina la ecuación de la recta que pasa por A, es paralela a π y corta a r.

Solución

Punto A(0, − 3, 1), plano π ≡ 2x− 2y + 3z = 0 y la recta r ≡ x+3 = y = (z − 3)/2.
(a)
Plano que pasa por A y contiene a r.



Como el plano π' contiene a la recta r y al punto A, tomamos de la recta r el punto B y el vector **v**, el otro vector será **BA**.
B(-3, 0, 3)
v = (1, 1, 2)
BA = (3, -3, -2)

El plano es π' = det (**AX**, **v**, **BA**) = $\begin{vmatrix} x+3 & y & z-3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ = (x+3)(4) – (y)(-8) + (z-3)(-6) = 4x +8y – 6z + 30 = 0

(b)
La ecuación de la recta que pasa por A, es paralela a π y corta a r, la vamos a dar como intersección de dos planos
El plano π' que pasa por A y contiene a r, que hemos calculado en el apartado (a), que es
4x + 8y – 6z + 30 = 0
Y el plnao π'' paralelo a π que pasa por A
El plano paralelo a π es 2x – 2y + 3z + K = 0. Como pasa por A, el punto cumple la ecuación del plano, es decir 0 – 2(-3) +3(1) + K = 0, de donde K = -9. Luego el plano π'' es 2x – 2y + 3z -9 = 0, y la recta pedida es

$$\begin{cases} 4x+8y-6z+30=0 \\ 2x-2y+3z-9=0 \end{cases}$$

Opción B

Ejercicio n° 1 de la opción B del modelo 5 de 2005

De la función f : (0, +∞) → ℜ definida por f (x) = (ax^2 + b)/ x, se sabe que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa x = 1 viene dada por y = − 2.
(a) [1'5 puntos] Calcula a y b.
(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

Solución

(a)

$f(x) = (ax^2 + b) / x$, con recta tangente en x = 1 la recta y = -2
La recta tangente en x = 1 es y – f(1) = f '(1)(x – 1), por tanto la pendiente f '(1) = 0 y f(1) = -2
$f(x) = (ax^2 + b) / x$
$f'(x) = [(2ax)x - (ax^2 + b)(1)] / (x)^2$
De f(1) = -2 tenemos –2 = (a + b)
De f '(1) = 0 tenemos 0 = = (2a) - (a + b) = a – b , de donde a = b, por tanto 2b = -2 y los valores pedidos son a = b = -1.
La función es $f(x) = (- x^2 – 1)/x$
(b)
Monotonía. Estudio de f '(x)
$f(x) = (- x^2 – 1)/x$
$f'(x) = [(-2x)x - (- x^2 - 1)(1)] / (x^2) = (-x^2 + 1) / (x^2)$
Los posibles máximos o mínimos relativos son las soluciones de f '(x) = 0
f '(x) = 0, de donde $-x^2 + 1 = 0$. Resolviéndolo se obtiene x = 1 y x = -1.
Como el dominio es (0, +∞) solo tomo x = 1.

Como f '(0'1) = (-0'01 + 1) /(+) > 0, f(x) es estrictamente creciente en (0,1)
Como f '(2) = (-4 + 1)/(+) < 0, f(x) es estrictamente decreciente en (1, + ∞)

Por definición x = 1/5 es un máximo relativo que vale f(1) = -2

Ejercicio n° 2 de la opción B del modelo 5 de 2005

[2'5 puntos] Sea $f : \Re \rightarrow \Re$ la función definida por $f(x) = x^2.sen(2x)$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0, 1).

Solución

Primitiva de $f(x) = x^2.sen(2x)$ que pase por (0, 1)

$F(x) = \int x^2.sen(2x)dx$ es una integral por partes

(Aplicamos $\int udv = uv - \int vdu$)

Tomamos $u = x^2$ y dv = sen(2x)dx, con lo cual du = 2xdx y $v = \int sen(2x)dx$ = [- cos(2x)] / (2)

$F(x) = \int x^2.sen(2x)dx = (x^2). [- \cos(2x)] / (2) + (1/2).\int 2x.\cos(2x)dx =$

$= - x^2.\cos(2x) / (2) + \int x.\cos(2x)dx = = - x^2.\cos(2x) / (2) + I$

$I = \int x.\cos(2x)dx$ vuelve a ser una integral pospartes

Tomamos u = x y dv = cos(2x)dx, con lo cual du = dx y $v = \int \cos(2x)dx$ = [sen(2x)] / (2)

$I = \int x.\cos(2x)dx = x.sen(2x) / (2) - (1/2).\int sen(2x)dx = = x.sen(2x) / (2) + \cos(2x) / (4).$

Por tanto $F(x) = \int x^2.sen(2x)dx = - x^2.\cos(2x) / (2) + I =$

$= - x^2.\cos(2x) / (2) + x.sen(2x) / (2) + \cos(2x) / (4) + K$
Como F(0) = 1, tenemos 1 = 0 + 0 + cos(0) / 4 + K = 1/4 + K, de donde K = 3/4

Ejercicio n° 3 de la opción B del modelo 5 de 2005

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + my + z &= 0 \\ x + y + mz &= 2 \\ mx + y + z &= m \end{aligned}$$

(a) [1 punto] ¿Para qué valor de m el sistema tiene al menos dos soluciones?
(b) [1'5 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema admite solución en la que x = 1?

Solución

$$\begin{aligned} x + my + z &= 0 \\ x + y + mz &= 2 \\ mx + y + z &= m \end{aligned}$$

(a)

Sea A = $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y A^* = $\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m & 2 \\ m & 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

Si el sistema tiene al menos dos soluciones nos dice que tiene infinitas soluciones, por lo tanto por el Teorema de Rouche, rango(A) = rango(A^*) < 3, luego el determinante de A tiene que ser cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}_{1^a+2^a+3^a} = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m+2 & m+2 & m+2 \end{vmatrix} = \text{Saco fuera } (m+2) =$$

$$= (m+2).\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ 2^a-1^a \\ 3^a-1^a \end{matrix} = (m+2)\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & 1-m & m-1 \\ 0 & 1-m & 0 \end{vmatrix} = (m+2).(1).\begin{vmatrix} 1-m & m-1 \\ 1-m & 0 \end{vmatrix} =$$

$= (m + 2)(1 – m)^2$

Igualándolo a cero $(2 + m)(1 – m)^2 = 0$, de donde m = 1 (doble) y m = - 2. Por tanto **para m ≠ 1 y m ≠ -2 el sistema tiene solución única.**

Lo estudiamos ahora para m = 1 y m = - 2

Si m = 1

La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada son A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y A^* = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Vemos que rango(A) = 1

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ = 2 -1 = 1 ≠ 0, rango(A^*) = 2.

Como rango(A) = 1 ≠ rango(A^*) = 2, el sistema no tiene solución.

Si m = - 2

La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada son A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y A^* = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ = 1 +2 = 3 ≠ 0, rango(A) = 2.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}_{2^a+3^a} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ = (-2)(2 – 2) = 0, rango(A^*) = 2.

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, el sistema tiene infinitas soluciones, y por tanto dos como me pide el problema.

(b)

¿Para qué valores de m el sistema admite solución en la que x = 1?

Si x = 1 el sistema es

1 + my + z = 0

1 + y + mz = 2

m + y + z = m, es decir

my + z = - 1

y + mz = 1

y + z = 0,

Sea B = $\begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y B* = $\begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

Como máximo rango(B) = 2, por tanto para que el sistema tenga solución con x = 1. rango(B*) = 2 con lo cual det(B*) = |B*| = 0

det(B*) = | B*| = $\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a+1^a \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1+m & 1+m & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ = 0, sea cual sea el valor de m, al tener dos filas proporcionales.

Por tanto **si x = 1 el sistema siempre tiene solución sea cual sea el valor de m**. (**Excluimos** por supuesto **el caso de m = 1**, pues ya habíamos visto que en este caso el sistema original era incompatible).

Ejercicio n° 4 de la opción B del modelo 5 de 2005

Se sabe que las rectas r $\equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = b+t \end{cases}$ y s $\equiv \begin{cases} x-y+z=3 \\ 6x+2z=2 \end{cases}$ están contenidas en un mismo plano.

(a) [1'25 puntos] Calcula b.
(b) [1'25 puntos] Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

Solución

(a)

Las rectas r $\equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = b+t \end{cases}$ y s $\equiv \begin{cases} x-y+z=3 \\ 6x+2z=2 \end{cases}$ están contenidas en un mismo plano

Tomamos de cada recta un punto y un vector.

De r punto A(1, -1, b) y vector director **u** = (1, -1, 1)

De s punto B y vector director **v**
Para el punto B tomo x = 0 con lo cual z = 1 e y = - 2 . Punto B(0, -2, 1)
Como vector **v** tomo el producto vectorial de los vectores normales de cada uno de los planos que forman la recta, el (1, -1, 1) y el (6, 0, 2).

v = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ = **i**(-2) – **j**(-4) + **k**(6) = (-2, 4, 6)

Si las rectas r y s están en el mismo plano, como sus vectores **u** y **v** directores no son proporcionales, tiene que ocurrir que det (**AB**, **u**, **v**) = 0
AB = (-1, -1, 1 – b)

det (**AB**, **u**, **v**) = $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1-b \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a+1^a \\ 3^a+1^a(-2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1-b \\ 0 & -2 & 2-b \\ 0 & 6 & 4+2b \end{vmatrix}$ =

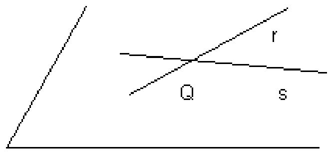
= $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1-b \\ 0 & -2 & 2-b \\ 0 & 6 & 4+2b \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -2 & 2-b \\ 6 & 4+2b \end{vmatrix}$ = (-1)(-8 - 4b -12 + 6b) = -2b + 20 = 0, de donde b =10.

La recta r es $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = 10+t \end{cases}$ para que ambas rectas estén en el mismo plano

(b)
Ponemos ambas rectas en paramétricas con parámetros distintos

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 10 + t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 0 - 2m \\ y = -2 + 4m \\ z = 1 + 6m \end{cases}$$

El plano que contiene a las rectas r y s, como están en el mismo plano tiene como punto el punto Q intersección de ambas rectas y como vectores el **u** de la recta r y el **v** de la recta s.



Para calcular el punto Q igualamos ambas rectas y resolvemos el sistema
x = x, y = y, z = z. En nuestro caso
1 + t = -2m
-1 – t = -2 + 4m
10 + t = 1 + 6m

Resolvemos las dos primeras
1 + t = -2m
-1 – t = -2 + 4m; sumando
0 = -2 + 2m, de donde m = 1 y t = -3

Veamos que verifica la tercera ecuación
10 + (-3) = 1 + 6(1), lo cual es cierto.

El punto Q intersección es Q(-2(1), -2 + 4(1), 1 + 6(1)) = Q(-2, 2, 7)

El plano pedido es det (**QX**, **u**, **v**) = $\begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z-7 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ =

= (x + 2)(-10) – (y – 2)(8) + (z – 7)(2) = -10x – 8y + 2z – 18 = 0.